재생과정(renewal process)을 활용한 품질관리 모형*

남 익 현**

《目 次》

Ⅰ. 들어가며

확률과정 중에서 사건 발생 사이의 시간이 i.i.d.(independent and identically distributed)인 경우를 재생과정(renewal process)라고 부른다. 또한 각 재생 과정의 사건이 발생할 때 보상 혹은 비용이 발생하는 경우를 재생보상과정(renewal reward process)라고 부른다. 이러한 재생보상과정은 많은 응용에 활용이 되고 있다. 우리는 본 논문에서 재생보상과정을 이용하여 품질관리 문제를 모형화하고자 한다.

Ⅱ. 기본모형의 가정

우리가 분석하려는 품질관리 모형의 가정을 먼저 제시하기로 하자. 우리가 다루는 생산 시스템은 매일 n개의 제품을 생산한다. 이러한 생산 시스템은 '정상' 상태인 경우 불량률이 p_1이고, 이러한 정상 상태가 유지되는 정상 가동 기간은 특정 확률분포를 따른다. 정상가동 기간을 표현하는 확률변수를 L이라고 할 때, 사건 L=j 의 확률은 $q(j)$이라고 하자. 보다 구체적으로, L=j라는 것은 생산 시스템이 j번째 날에 처음으로 '비정상' 상태로 전환된다는 것을 의미한다. 즉 j-1까지는 불량률이 p_1으로 매일 n개씩 생산을 하고, j날부터는 불량률이 p_2가 됨을 의미한다. 여기서 j의 정의역은 $\{j=1,2,\cdots\}$이다. 생산 시스템이 비정상이라 함은 불량률이 $p_2(>p_1)$인 경우로, 정상가동의

* 본 연구는 서울대학교 경영정보연구소의 연구비 지원에 의해 이루어졌습니다.
** 서울대학교 경영대학

경우보다 불량률이 상승함을 말한다. 그리고 일단 비정상이 된 생산 시스템은 특별한 조치가 없는 한 계속 비정상으로 남아 있게 된다. 즉 비정상 상태의 생산 시스템이 자연스레 정상 상태로 전환되지는 않는다.

또 다른 가정은 매일 매일의 생산에 있어 불량의 발생은 서로 독립적이라는 것이다. 즉 오늘 생산 제품에서의 불량품 개수와 내일 생산 제품의 불량품 개수는 서로 독립적이다. 물론 L에 따라 해당 일의 불량률은 다를 수 있다. 즉 정상 가동상태인 경우 불량률은 p_1이고 비정상 가동상태의 경우에는 p_2이다.

품질관리를 위해 우리는 매일 n개의 생산을 마친 후 품질검사를 수행한다. 매일 수행하는 품질검사에서 불량품의 개수는 k 이상이 나오면 생산 시스템에 대한 본격적인 점검을 실시한다. 이러한 본 점검은 overhaul이라고 부르고, 생산 시스템에 대한 전체적인 점검과 수리를 말한다고 할 수 있다. 이러한 본 점검을 실시하는데 비용이 발생하는데, 본 점검 비용은 생산 시스템의 상태에 따라 발생금액의 크기가 다르다. 생산 시스템이 정상인 경우 O_1이고 비정상인 경우 O_2 라고 한다. 우리는 $O_1 < O_2$를 가정한다. 편의상 본 점검에 소요되는 시간은 무시할 정도로 작다고 가정하자.

본 점검을 마친 생산 시스템은 정상 상태로 전환이 되어 새로이 생산을 시작하게 된다. 생산 시스템에서 매일 n개씩 생산하는 물량에는 불량품이 혼재되어 있는데, 이러한 불량품에 대한 비용은 재작업 등으로 인해 개당 c원이 발생한다고 한다. 우리가 결정하여야 하는 본 모형에서의 의사결정 변수는 기대비용을 최소화하기 위해 본 점검을 실시하기 위한 기준인 'k'를 결정하는 것이다.

여기에서 우리가 적용할 재생과정(renewal process)를 살펴보기로 하자. 본 점검 직후 정상상태로 돌아온 생산 시스템이 가동을 시작하는 시점에서 다음 본 점검을 마치는 시점까지가 재생과정의 사이클 시간(cycle time)이 된다. 본 점검은 하루 생산량 n개에서 k개 이상의 불량이 발생할 때 이루어진다. 이러한 재생과정은 확률적으로 동일하게 반복이 된다. 따라서 우리는 최적 k를 구함에 있어 사이클 시간동안의 기대비용을 최소화하고자 한다.

Ⅲ. 모형의 구성

먼저 새로이 재생과정의 사이클을 시작한 후 t일에 본 점검을 하게 되는 경우의 확률을 구해보기로 하자. 즉 t일에 생산한 n개 중에서 k개 이상의 불량이 발생할 확률을 구하기로 하자. 그리고 추가적인 내용은 t일에 본 점검을 한다는 것은 t일 이전에는 하루당 생산량 n개 중에서 k개 이상의 불량품이 발생한 적이 없다는 것이다. 하루당 생산량 n개 중에서 k개의 불량이 발생할 확률은 이항분포(binomial distribution)를 이용하여 표현할 수 있다.

그런데 우리가 유념해야 하는 사실은 t와 정상가동기간 L=j과의 관계에 따라 해당 확률이 달라진다는 것이다. 따라서 두 가지 경우로 나누어 확률을 구하여야 한다. 즉 본 점검 시점에서 생산시스템의 상태가 정상인지 비정상인지에 따라 두 가지 경우로 나누어 확률을 구해야 한다. 표현의 간결성을 위해 다음과 같이 부호(notation)를 정의하자.

$$a_1(k)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_1^i(1-p_1)^{n-i},\ \text{그리고}\ a_2(k)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_2^i(1-p_2)^{n-i}.$$

이는 각각 정상 가동 상태에서 k개 이상의 불량이 발생하여 본 점검을 하게 될 확률과 비정상 상태에서 본 점검을 하게 될 확률을 나타내는 것이다.

첫째, $t<j$인 경우를 살펴보자. 이 경우는 본 점검 시점 t가 생산 시스템이 정상인 상태에서 발생하는 것을 말한다. 또한 t 이전에는 매일 불량이 k개 미만으로 발생하다가 t 일에 이르러 k개 이상의 불량이 발생한 것을 의미한다. 따라서 이러한 사건의 확률은 $[1-a_1(k)]^{t-1}a_1(k)$이 된다.

둘째로, $t\ge j$인 경우를 살펴보자. 이 경우는 본 점검 시점 t가 생산 시스템이 비정상인 상태에서 발생한다는 것을 뜻한다. 즉 j-1 일 동안은 정상 가동상태에서 하루의 불량이 k개 미만으로 발생하고 t-j 일 동안은 생산 시스템이 비정상 상태로 넘어갔지만 매일 불량품의 개수가 k개 미만으로 본점검을 받지 않아도 되었고, 드디어 t일에 이르러 k개 이상의 불량이 발생한 사건을 말한다. 따라서 이의 확률은 $[1-a_1(k)]^{j-1}[1-a_2(k)]^{t-j}a_2(k)$이 된다.

우리는 앞서 분석한 내용을 활용하고 조건부 기댓값공식을 이용하여 T=t일에 불량품이 k개 이상이 발생하여 본 점검을 하게 될 확률을 다음과 같이 구할 수 있다. 즉 t일에 본 점검을 수행할 확률을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}P[T=t]&=E[P[T=t|L]]\\&=\sum_{j=t+1}^{\infty}[1-a_1(k)]^{t-1}a_1(k)q(j)+\sum_{j=1}^{t}[1-a_1(k)]^{j-1}[1-a_2(k)]^{t-j}a_2(k)q(j)\\&=[1-a_1(k)]^{t-1}a_1(k)P[L>t]+\sum_{j=1}^{t}[1-a_1(k)]^{j-1}[1-a_2(k)]^{t-j}a_2(k)q(j)\\&=A_1(t)+A_2(t).\end{aligned}$$

본 점검을 수행하는 사건이 사이클을 결정하므로 사이클 타임의 기댓값은

$E(T)=\sum_{t=1}^{\infty}t[A_1(t)+A_2(t)]$이 된다.

우리가 본 점검 비용의 기댓값을 구하기 위해서는 점검시점에서의 생산 시스템 상태를 파악하여야 한다. 왜냐하면 정상인지 비정상인지에 따라 본 점검 비용에서 차이가 발생하기 때문이다. 이를 위해서 우리는 베이즈 정리(Bayes' formula)를 활용할 수 있다. 즉 우리는 베이즈 정리에 의해 다음을 구할 수 있다.

$$\text{P〔정상 | k or more failures at t〕} = \frac{A_1(t)}{A_1(t)+A_2(t)},$$

$$\text{P〔비정상 | k or more failures at t〕} = \frac{A_2(t)}{A_1(t)+A_2(t)}.$$

여기서 우리는 t일에 본 점검을 할 확률, 즉 t일에 이르러 처음으로 k개 이상의 불량품이 발생할 확률이 $P(t) = A_1(t) + A_2(t)$이라는 내용을 이용하였다.

우리가 $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{A_1(t)}{A_1(t)+A_2(t)} = \breve{A}_1$, $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{A_2(t)}{A_1(t)+A_2(t)} = \breve{A}_2$로 표시하면, 재생과정의 한 사이클에서 발생하는 본 점검 비용의 기댓값은 $\breve{A}_1 O_1 + \breve{A}_2 O_2$가 된다.

이제 본 점검 비용에 추가하여 우리가 고려해야 하는 불량품에 대한 비용을 구하기로 하자. 우리는 조건부 기댓값의 식, 즉 E(불량품비용)=EE〔불량품비용 | T, L〕을 이용하고, 이 과정에서 $T=t$가 stopping time이라는 사실을 활용하여 불량품에 대한 기대 비용을 구하고자 한다. 불량품에 따른 기대비용을 구할 때 우리는 이항분포의 기댓값을 이용한다. 즉 n개를 생산하고 개별 생산품에 대해 불량률이 p_i일 때 발생하는 불량품 개수의 기댓값은 np_i를 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다. 참고로 다음의 불량품에 따른 기대비용을 구함에 있어 모든 t와 j에 대해 총합을 구하는 것에 유념할 필요가 있다. 이를 위해 $\sum$을 이중으로 표시한 것이다.

$$\begin{aligned}
&\sum\sum_{t<j} np_1 ct[1-a_1(k)]^{t-1} a_1(k) q(j) \\
&+\sum\sum_{t\geq j}[np_1 c(j-1) + np_2 c(t-j+1)][1-a_1(k)]^{j-1}[1-a_2(k)]^{t-j} a_2(k) q(j) \\
&= H(k)
\end{aligned}$$

따라서 우리는 불량품에 따른 기대비용에 앞서 구한 본 점검 비용의 기댓값을 더한 총합을 사이클 타임의 기댓값으로 나눈 식을 최소화하는 k를 구하면 되는 것이다. 즉

$$\frac{\breve{A}_1 O_1 + \breve{A}_2 O_2 + H(k)}{\sum_{t=1}^{\infty} t[A_1(t)+A_2(t)]}$$
을 최소화하는 k를 구하여야 한다.

이러한 k는 품질관리에 수반되는 총비용을 최소화하는 본 점검 기준을 제시하는 것이다.

Ⅳ. 보다 일반화된 모형

앞서 언급한 기본 모형을 보다 현실적인 모형으로 확장해보자. 기본모형에서는 본 점검을 수행한 경우 생산 시스템은 정상상태로 재설정이 된다는 것을 가정하였다. 하지만 일반적으로 본 점검을 실시하더라도 정상상태로 전환되는 것이 100% 확실한 경우는 드물다. 본 점검 시점에 생산 시스템의 상태에 따라 본 점검에 소요되는 비용에서 차이가 날뿐더러 정상 상태로 전환되는 확률 내지는 가능성이 다른 경우를 상정해 볼 수 있다. 가령 본 점검을 실시하는 시점에서의 생산 시스템이 정상인 경우에는 본 점검을 수행한 후에 정상상태로 설정되지만, 비정상 상태에서 실시한 본 점검의 경우 1-r의 확률로 정상 상태로 전환되고 r의 확률로 비정상 상태로 남게 될 위험이 있는 경우를 생각해 볼 수 있다.

이와 같이 보다 일반적인 경우에 우리는 생산 시스템이 새로이 정상상태에서 가동을 시작하는 시점을 기준으로 사이클을 정의하여야 재생과정이 된다. 이 경우에는 재생과정의 사이클 시간이 보다 복잡해진다. 본 점검의 조건인 k개 이상의 불량이 발생한 시점에 본 점검을 실시할 텐데, 그 당시 생산 시스템의 상태가 비정상 상태인 경우에는 본 점검 후에도 비정상일 가능성이 존재하기 때문이다. 이 경우 생산 시스템은 정상상태로 전환되지 않았기 때문에 비정상 상태에서 가동이 이루어지고 향후 추가적인 점검을 위한 하부 사이클(sub-cycle)이 진행된다. 추가적인 사이클이 진행이 되어 본 점검이 실시되며, 이로 인해 생산 시스템이 정상 상태로 전환될 때까지 하부 사이클은 반복되게 된다.

T_i^2를 위에서 언급한 i번째 하부 사이클의 기간이라고 표시하자. 위 첨자 2는 추가 사이클이 정상상태가 아닌 비정상 상태에서 생산 활동이 진행됨을 나타내는 것이다. 이러한 하부 사이클이 진행되는 횟수를 확률변수 M으로 표시하자. 즉 하부 사이클이 진행이 되어 불량품이 k개 이상인 시점에 본 점검이 이루어지고, 그 결과 정상 상태로 전환이 되면 사이클이 완결이 된다. 만약 본 점검 결과로 정상 상태로 전환이 이루어지지 못하면 다시 하부 사이클이 시작이 되고 이러한 과정은 본 점검이 생산 시스템을 정상 상태로 전환시킬 때까지 이루어진다. 여기서 M은 이러한 하부 사이클이 완료될 때까지의 하부 사이클 수행 횟수에 해당한다. 따라서 M은 성공확률이 1-r인 기하분포(geometric distribution)를 갖는다.

$$P(M=m)=r^{m-1}(1-r).$$

그리고 마찬가지 논리로 T_i^2의 분포는 다음과 같은 기하분포를 갖는다.

$$P[T_i^2 = t] = [1 - a_2(k)]^{t-1} a_2(k).$$

T_i^2는 생산 시스템이 비정상 상태에서 진행되는 것이므로 매일 진행하는 품질검사에서 본 점검이 실시되도록 k개 이상의 불량품이 발생할 확률은 $a_2(k)$임을 반영한 것에 유념하여야 한다.

기하분포의 특성에 의해 우리는 $E(M) = \frac{1}{1-r}$, $E(T_i^2) = \frac{1}{a_2(k)}$를 구할 수 있다.

그리고 M과 T_i^2의 상호독립성으로부터 $E(\sum_{i=1}^{M} T_i^2) = \frac{1}{(1-r)a_2(k)}$

따라서 확장모형에서의 새로운 재생 사이클 시간의 기댓값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(T) + \frac{r\breve{A}_2}{(1-r)a_2(k)}$$

두 번째 항의 분자가 $r\breve{A}_2$인 이유는 하부 사이클 $\sum_{i=1}^{M} T_i^2$이 추가되기 위해서는 처음으로 본 점검을 위한 조건이 충족될 경우 생산 시스템이 비정상 상태이어야 하고($\breve{A}_2$), 이러한 비정상 생산 시스템에 대해 본 점검을 실시하여 계속 비정상 상태로 남게 되는 확률(r)을 곱한 것을 의미한다.

새로운 사이클 시간에 맞추어 본 점검 비용과 불량비용을 조정하여 목적함수식을 재구성하면 새로운 모형에 적합하게 된다. 한 사이클 당 발생하는 본 점검 비용의 기댓값은 앞서 구한 본 점검 비용의 기댓값에 하부 사이클 $\sum_{i=1}^{M} T_i^2$로 추가되는 본 점검 비용의 기댓값을 더하면 된다. 하부 사이클에 따른 본 점검 횟수의 기댓값은 $E(M) = \frac{1}{1-r}$이다. 따라서 본 점검 비용의 기댓값은 $\breve{A}_1 O_1 + \breve{A}_2 O_2 + O_2 \frac{r\breve{A}_2}{1-r}$가 된다. 불량품에 따른 비용의 기댓값은 앞서 우리가 다루었던 정상상태에서 시작하는 사이클 기간의 비용과 추가로 진행이 될 수 있는 하부 사이클, 즉 $\sum_{i=1}^{M} T_i^2$ 동안의 불량품 비용의 기댓값으로 구성이 된다.

하부 사이클 하나 당 발생하는 불량품비용의 기댓값은 $E(T_i^2) = \frac{1}{a_2(k)}$에 하루 당 발생하는 불량

품 개수의 기댓값 np_2와 단위당 비용 c를 곱해 $\frac{cnp_2}{a_2(k)}$가 된다. 이러한 하부 사이클은 평균 $E(M)=\frac{1}{1-r}$만큼 반복이 된다. 하부 사이클이 추가로 진행이 되려면, 초기 사이클이 마칠 때 비정상 상태이어야 하므로 이를 위한 조건부 확률 $\breve{A}_2$를 곱해야 하고 또한 비정상상태의 생산 시스템에 본 점검을 수행한 후 비정상 상태로 남아 있어야 하므로 r을 곱해야 한다. 따라서 불량품에 따른 비용의 기댓값은 $H(k)+\frac{cnp_2 r\breve{A}}{(1-r)a_2(k)}$이 된다. 따라서 이 경우 사이클 당 기대 비용은 다음과 같이 표현할 수 있으며, 이를 최소화하는 k를 구해야 한다.

$$\frac{\breve{A}_1 O_1+\breve{A}_2 O_2+O_2\frac{r\breve{A}_2}{1-r}+H(k)+\frac{cnp_2 r\breve{A}}{(1-r)a_2(k)}}{E(T)+\frac{r\breve{A}_2}{(1-r)a_2(k)}}$$

Ⅴ. 마치며

우리는 본 논문에서 품질관리의 한 방식으로 일정 수 이상의 불량품이 나올 경우 생산 시스템을 점검하는 정책을 다루었다. 생산 시스템의 점검을 자주하게 되면 점검 비용이 많이 발생하게 된다. 반면에 점검을 지나치게 오랜 시간이 흐른 후에 하게 되면, 생산시스템이 불량 상태에 머무는 기간이 길게 되어 이로 인한 불량 비용이 증가하게 된다. 따라서 이들 비용 사이의 상반관계를 반영하여 최적의 방식을 도출하여야 한다.

본 논문에서는 기본 모형으로 본 점검을 수행한 경우 생산 시스템이 정상상태로 확실하게 전환이 된다는 가정 하에 분석을 하였다. 그리고 정상 전환이 불확실한 경우를 보다 일반적인 경우로 분류하여 추가적인 응용을 하였다. 이러한 모델의 분석에 적용한 것이 재생보상과정(renewal reward process)이다.

참 고 문 헌

1. Sheldon M. Ross, Introduction to Probability Models, 11th edition, Elsevier Inc. 2014.